

الگو و دنباله

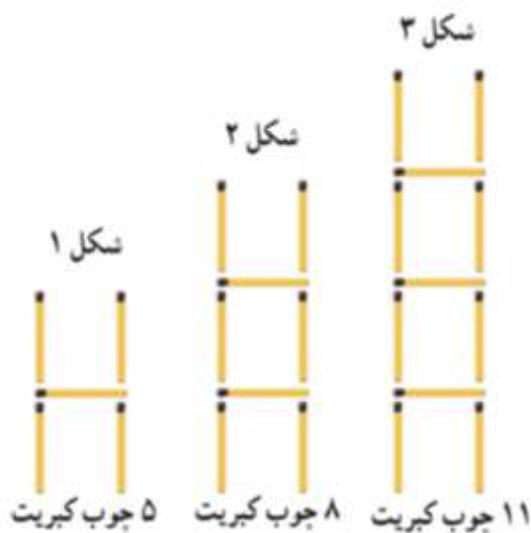
به نام خدا

در جلسه گذشته با الگوهای فطری و غیرفطری آشنا شدیم. در این جلسه مبحث الگوها رو ادامه میدیم و بعد با دنباله‌ها آشنا می‌شیم.

هممون تا حالا کلی از این بازیهای ریاضی دیدیم که چند تا عدد رو به ما میدن و ما باید درس بزنیم عدد بعدی باید چند باشه؟

اینطور مواقع چکار می‌کنیم؟ سعی می‌کنیم با نگاه کردن به عددهای داده شده، یه ارتباط بینشون پیدا کنیم و با استفاده از اون ارتباط، عدد بعدی رو درس بزنیم.

یه مثال ببینیم. شکلهای زیر رو ببینید:

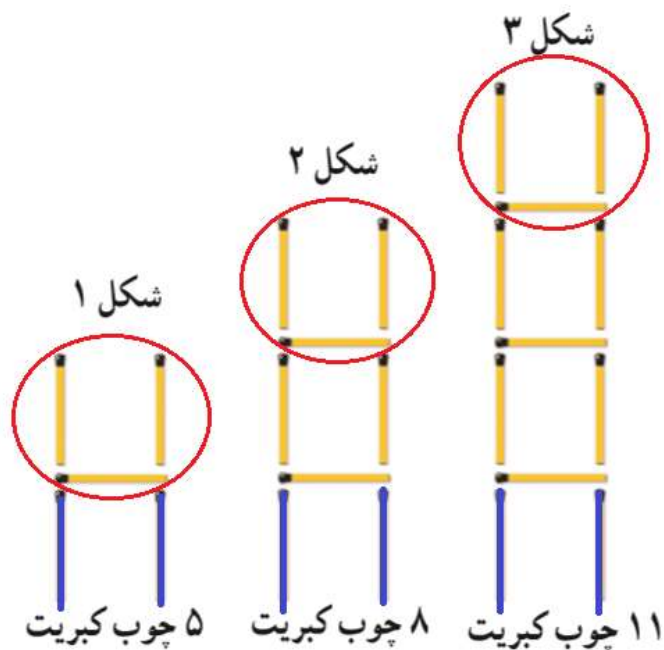


فعلا با بحث ریاضیش کاری نداریم، فقط به چشم یه بازی بوش نگاه می‌کنیم!

ممکنه ماها بتونیم الگوهای مختلفی رو برای این چوب کبریتا پیدا کنیم؛

مثلا من اینطوری میگویم:

دو تا چوب کبریت ثابت داریم و در هر مرحله سه تا چوب کبریت بهوش اضافه میشه:



دو تا چوبی که ثابت بود رو با رنگ آبی نشون دادیم.

همینطوری هم که می بینید در هر مرحله ۳ تا چوب اضافه شده

پس اگه بنفویم تعداد چوبهای مرحله ی بعد رو درس بنزنیم، اینطوری می گیم:

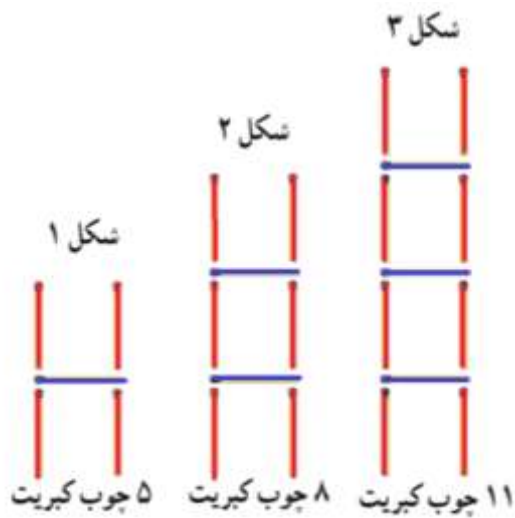
در مرحله بعدی هم ۳ تا چوب اضافه میشه و تعداد چوبها برابر ۱۴ میشه.

دو ستون یه جور دیگه نگاه میکنه، اون میاد چوبها رو به چوبهای افقی و عمودی

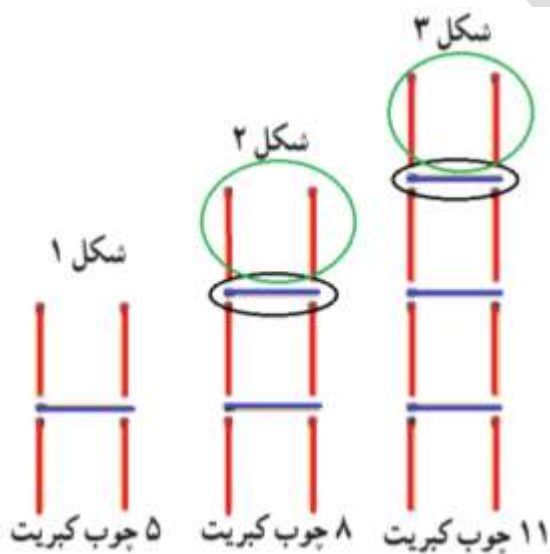
تقسیم بندی میکنه و اینطور میگه:

توی هر مرحله، یه چوب افقی و دو تا چوب عمودی به شکل اضافه میشه:

پوهای افقی رو با رنگ آبی و پوهای عمودی رو با رنگ قرمز نشون میدیم، شکل زیر رو بینید:



در هر مرحله یکی به پوهای افقی (آبی) اضافه میشه و دو تا به پوهای قرمز (عمودی):



تا اینجا تونستیم به دو روش ارتباط بین پوها رو پیدا کنیم، این کار یکی از بخشهای مهم در بحث دنباله‌هاست، یعنی پیدا کردن ارتباط بین جملات.

ولی این به تنهایی کافی نیست، چرا؟ چون ممکنه از ما بپرسن شکل هزارم چند تا پوب داره. ما قطعاً نمی‌تونیم هزار تا جمله بنویسیم تا به جمله‌ی هزارم برسیم 😊

پس باید به راه بهتر پیدا کنیم، پس میایم این ارتباط رو به زبون ریاضی بنویسیم 😊
 بطوری؟ بریم ببینیم.

اول از همه باید بدونیم که جملات دنباله رو با a_n نشون میدیم، یعنی:

جمله‌ی اول دنباله a_1

جمله‌ی دوم دنباله a_2

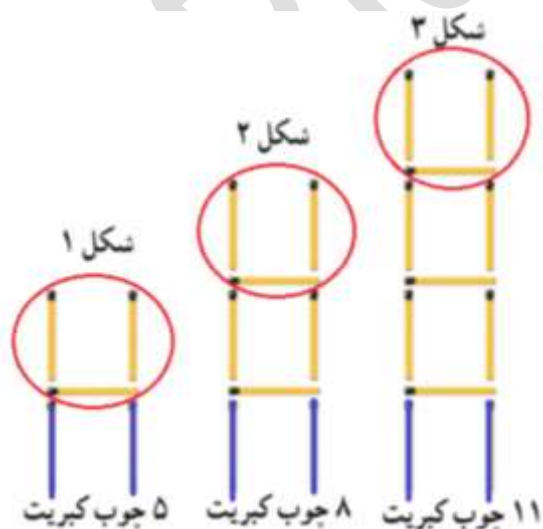
.....

جمله‌ی n م دنباله a_n

جمله‌ی n م دنباله یه اسم دیگه هم داره: جمله‌ی عمومی

برای به دست آوردن جمله‌ی عمومی، معمولاً چند تا از جملات دنباله رو می‌نویسیم تا
 بوسیله‌ی اونا بتونیم جمله‌ی عمومی رو حدس بزنیم.

یه بار دیگه شکل اول رو می‌بینیم:



هر سه تا شکل ما، دو تا چوب کبریت ثابت دارن، پس تا اینجا داریم:

$$\text{جمله اول} : a_1 = 2 + \dots$$

$$\text{جمله دوم} : a_2 = 2 + \dots$$

$$\text{جمله سوم} : a_3 = 2 + \dots$$

حالا ادامه میدیم: (توجه داشته باشید که منظور از جمله اول، شکل اوله)

جمله اول دیگه چی داره؟ ۳ تا چوب

$$\text{جمله اول} : a_1 = 2 + 3$$

جمله دوم چی بیشتر از جمله اول داره؟ ۳ تا چوب. بنابراین:

$$\text{جمله دوم} : a_2 = 2 + 3 + 3$$

جمله سوم چی بیشتر از جمله دوم داره؟ ۳ تا چوب. بنابراین:

$$\text{جمله سوم} : a_3 = 2 + 3 + 3 + 3$$

جمله‌ها رو به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$\text{جمله اول} : a_1 = 2 + 3$$

$$\text{جمله دوم} : a_2 = 2 + 3 + 3$$

$$\text{جمله سوم} : a_3 = 2 + 3 + 3 + 3$$

یه کم ریاضی‌تر می‌نویسیم:

$$\text{جمله اول} : a_1 = 2 + 3 = 2 + 1(3)$$

$$\text{جمله دوم} : a_2 = 2 + 3 + 3 = 2 + 2(3)$$

$$\text{جمله سوم} : a_3 = 2 + 3 + 3 + 3 = 2 + 3(3)$$

در جمله‌ی اول، ۱ در ۳ ضرب شده

در جمله‌ی دوم، ۲ در ۳ ضرب شده

در جمله‌ی سوم، ۳ در ۳ ضرب شده

بنابراین در جمله‌ی n ، $۳n$ در ۳ ضرب شده. پس جمله‌ی n بصورت زیر می‌شود:

$$a_n = 2 + 3n$$

وقتی جمله‌ی عمومی رو داشته باشیم، به راحتی می‌تونیم هر جمله‌ای رو که بخوایم به دست بیاریم، فقط کافیه به جای n ، عددی که بھمون دادن رو بزاریم.

مثال:

در دنباله‌ی مثال قبل، جمله‌ی هزارم چنده (یا به عبارتی، شکل هزارم چند تا چوب کبریت داره):

$$a_{1000} = 2 + (3 \times 1000) = 3002$$

حالا به سوال دیگه:

شکل چندم این دنباله ۷۷ تا چوب داره؟

در واقع صورت سوال داره اینو میگه: جمله‌ی n دنباله ۷۷ تا چوب داره، n چنده؟

رابطه‌ی بین چوبها رو داشتیم که به صورت زیر بود:

$$a_n = 2 + 3n$$

در این سوال ما چی رو می‌خوایم؟ n

چی رو داریم؟ a_n ، یعنی همون جمله‌ی n .

پس یه جای a_n میذاریم ۷۷

$$77 = 2 + 3n$$

معادله رو حل می‌کنیم:

$$75 = 3n \rightarrow n = 25$$

بنابراین تا اینجا یاد گرفتیم که به دو صورت از جمله‌ی عمومی استفاده کنیم:

۱. n رو به ما بدن و ما a_n رو به دست بیاریم.

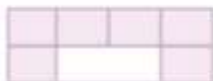
۲. a_n رو به ما بدن و ما n رو به دست بیاریم.

حل تمرین صفحه ۲۰

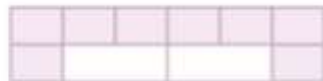
الگو و دنباله

تمرین

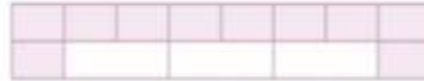
۱ به الگوی روبه‌رو توجه کنید.



۶ کانی تیره
۱ کانی سفید



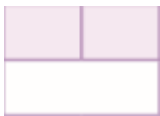
۸ کانی تیره
۲ کانی سفید



۱۰ کانی تیره
۳ کانی سفید

- الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی‌های تیره آن را مشخص کنید.
- ب) تعداد کاشی‌های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله هفتم آن بنویسید.
- پ) اگر n تعداد کاشی‌های سفید و t_n تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید.
- ت) برای 10^6 کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟
- ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل 5^6 کاشی تیره باشد؟ اگر هست، تعداد کاشی‌های سفید آن چقدر است؟

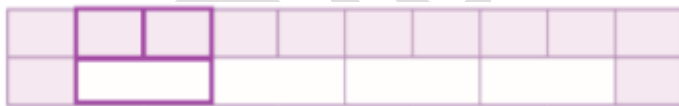
الف: آگه با دقت به شکلها نگاه کنیم می بینیم که در هر مرحله، یه کاشی سفید و دو کاشی تیره اضافه شده، یعنی شکل زیر:



یعنی این قسمت، به شکل اول اضافه شدم و شکل دوم ساخته شده

به شکل دوم اضافه شده و شکل سوم ساخته شده

پس ما آگه بفوایم شکل چهارم رو رسم کنیم، باید این قسمت رو به شکل سوم اضافه کنیم:



و به این صورت شکل چهارم ساخته میشه.

ب: میفوایم تعداد کاشیهای تیره رو تا مرحله ی هفتم بنویسیم:

تا مرحله سوم رو که می تونیم از روی شکل بنویسیم:

۶ ، ۸ ، ۱۰

چه ارتباطی بین این اعداد وجود داره؟ هر مرحله دو تا اضافه شدن (البته از روی شکل

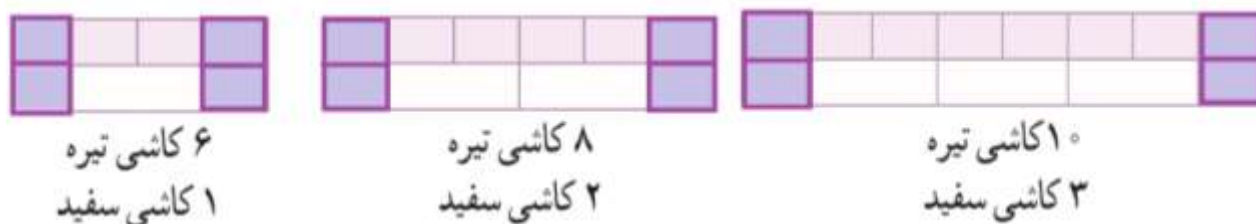
هم دیدیم که در هر مرحله دو تا کاشی تیره اضافه میشه) ، بنابراین:

۶، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۶، ۱۸

پ: آگه n تعداد کاشیهای سفید و t_n تعداد کاشیهای تیره باشه، میفوییم t_n رو بر حسب n بنویسیم.

قبل از اینکه این قسمت رو حل کنیم، به این نکته توجه کنید که ممکنه الگوهای متفاوتی رو بشه برای این قسمت نوشت.

در واقع میفوییم پیدا کنیم که چه ارتباطی بین تعداد کاشیهای سفید و تیره وجود داره. یه بار دیگه شکل کاشیها رو ببینیم:



توجه کنید کاشیهایی که پررنگتر نشونشون دادیم در هر مرحله ثابته. یعنی ما مرحله ۱ باشیم یا مرحله ۳ یا مرحله ۱۰۰، این تعداد کاشیها ثابتن.

فرض کنیم از مرحله ۱ اول سوال می کنیم که شما چند تا کاشی تیره لازم داری؟

میگه تعداد کاشیهای سفید ۳ رو در ۲ ضرب کن، نتیجه هر چی شد ۴ تا بوش اضافه کن ببینیم درست گفته یا نه؟

مرحله اول:

۱ کاشی سفید داره، در ۲ ضربش می کنیم میشه ۲

۴ تا باهاش جمع می کنیم میشه ۶

پس درسته

مرحله دو^م:

۲ کاشی سفید داره، در ۲ ضربش می‌کنیم میشه ۴

۴ تا باهاش جمع می‌کنیم میشه ۸

پس درسته

این الگو رو می‌تونیم برای همه مراحل انجام بدیم، یعنی بگیریم آگه می‌فوی تعداد کاشیهای تیره رو در هر مرحله بدونی، تعداد کاشیهای سفید رو دو برابر کن و نتیجه رو با ۴ جمع کن اینو به صورت ریاضی می‌نویسیم:

$$\text{کاشی تیره} = (2 \times \text{کاشی سفید}) + 4$$

صورت سوال گفته تعداد کاشیهای سفید رو با n و تعداد کاشیهای تیره رو با t_n نشون بدیم، بنابراین:

$$t_n = 2n + 4$$

ت: می‌فوییم بینیم برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره احتیاج داریم، پس توی فرمول بالا به جای n قرار میدیم ۱۰۰:

$$t_n = (2 \times 100) + 4 \rightarrow t_n = 204$$

ث: از ما سوال کرده آیا در این الگو، شکلی وجود داره که شامل ۵۰ تا کاشی تیره باشه؟

توی فرمولی که به دست آوردیم به جای کاشی تیره میذاریم ۵۰ تا ببینیم نتیجه چی میشه:

$$50 = 2n + 4 \rightarrow n = 23$$

در این سوال n هم نشوندهنده ی تعداد کاشیهای سفیده هم نشوندهنده شماره مرحله

پس در مرحله ۲۳ ما به ۲۳ کاشی سفید و ۵۰ کاشی تیره نیاز داریم.

ادامه تمرینها رو میتونید در "کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید ☺

در صورت تمایل به عضویت، به ادمین کانال مراجعه کنید.

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

www.riazibaham.ir

و کانالهای @RiaziBaHam و @RiaziBaHam10tr

برای دریافت جزوات سایر پایه ها، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات

امتثانی حل شده، به "ریاضی با هم" پیوندید.